• الأحداث المستقلة:

تعريف: إذا كان لدينا تجربة عشوائية مجموعة نتائجها Ω وكان A، B حدثان متعلقان بهذه التجربة عندئذ بالتعريف نقول عن هذين الحدثين أنهما مستقلان إذا تحقق أحد الشروط التالية:

"يعني وقوع الحدث A ليس له علاقة بوقوع الحدث B"

1) $P(A|B) = P(A)$ "يعني وقوع الحدث A ليس له علاقة بوقوع الحدث B"

2) $P(B|A) = P(B)$ " B " " " " " A "

3) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$; $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$

تعريف: الأحداث المستقلة مثنى: نقول عن الأحداث A, B, C أنها أحداث مستقلة مثنى إذا كان كل اثنان منها يحققان شرط الاستقلال مع بعضهما، أي تحقق ثلاث شروط:

1) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

2) $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$

3) $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

• ليكن المثال: إذا كان لدينا عائلة لديها طفلان عندئذ المطلوب:

1. عين Ω

2. عين الحدث A الذي يتم إذا كان الطفل الأول صبي.

- " B " " " الثاني "

- " C " إذا كان في العائلة صبي واحد فقط

الحل:

1) $\Omega = \{bb, bg, gb, gg\}$

2) $A = \{bb, bg\}$, $B = \{bb, gb\}$, $C = \{bg, gb\}$

- هل هذه الأحداث مستقلة مثنى؟

$P(A) = \frac{1}{2}$	$A \cap B = \{bb\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}$
$P(B) = \frac{1}{2}$	$A \cap C = \{bg\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{4}$
$P(C) = \frac{1}{2}$	$B \cap C = \{gb\} \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{1}{4}$

من الملاحظ أن الأحداث الثلاثة مستقلة مثنى لأن كل اثنان يحققان شرط الاستقلال.

• ملاحظة: ما هي الأحداث المستقلة عن بعضها؟

قبل أن نتعرف على الأحداث المستقلة عن بعضها يجب أن نعرف الحدث شبه الأكيد والحدث شبه المستحيل.

- نقول عن الحدث A إنه حدث شبه أكيد إذا كان احتماله يساوي الواحد

(احتماله يساوي $P(A)$ ...)

بالضرورة أن يساوي Ω .

ونقول عن الحدث A أنه شبه مستحيل إذا كان احتماله يساوي الصفر، وهو ليس بالضرورة أنه يساوي الحدث ∅

- لو فرضنا أن لدينا حدث A مستقل عن نفسه أي أن:

$$P(A\cap A)=P(A)\cdot P(A)$$

بحسب شرط الاستقلال: $P(A)=(P(A))^2$

$$P(A)-(P(A))^2=0 \Rightarrow P(A)[1-P(A)]=0 \Rightarrow$$

إما $P(A)=0 \Rightarrow$ A حدث شبه مستحيل

أو $1-P(A)=0 \Rightarrow P(A)=1$ إذن A حدث شبه أكيد

لذلك فإن الأحداث المستقلة عن نفسها هي الأحداث شبه مستحيلة أو شبه أكيدة.

* ملاحظة: الحدث الأكيد والحدث المستحيل هما حدثان مستقلان عن أي حدث آخر متعلق بتجربة عشوائية وذلك لأنه إذا كان لدينا A حدث متعلق بتجربة عشوائية:

1) $A\cap\Omega=A \Rightarrow P(A\cap\Omega)=P(A)\cdot \underbrace{P(\Omega)}_{=1}$

2) $P(A\cap\emptyset)=P(A)\,\underbrace{P(\emptyset)}_{=0}$

Ω ، ∅ حدثان مستقلان عن أي حدث.

* تعريف (الأحداث المستقلة بالإجمال): نقول عن الأحداث A, B, C أنها أحداث مستقلة بالإجمال إذا كانت هذه الأحداث مستقلة مثنى وتحقق الشرط:

1) الاستقلال مثنى

2) $P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

- ويمكن تعميم هذا التعريف على n حدث أي إذا كانت الأحداث $A_1, A_2, \dots, A_n$ المتعلقة بتجربة عشوائية نقول عن هذه الأحداث أنها مستقلة بالإجمال إذا كانت مستقلة مثنى وعلى أثنان وعلى ثلاثة وعلى أربعة و... وعلى $(n-1)$

وبالتالي يتحقق الشرط الأخير وهو:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)=P(A_1)\,P(A_2)\dots P(A_n)$$
$$=\prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

* ومن أجل المثال: إذا كانت الأحداث A_1, A_2, A_3 مستقلة بالإجمال عندئذ وكانت احتمالاتها: $P(A_1)=\frac{1}{2}$ ، $P(A_2)=\frac{1}{3}$ ، $P(A_3)=\frac{1}{4}$

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$$

- ملاحظة: إذا كانت الأحداث A_1, A_2, A_3 مستقلة بالإجمال فهي حتماً مستقلة مثنى أما العكس في الحالة العامة غير صحيح أي إذا كانت الأحداث A_1, A_2, A_3

مستقلة مثنى مثنى ليس بالضرورة أن تكون مستقلة بالإجمال

نعود إلى المثال السابق التي عندما طلبنا ... لذلك نعم هذه الملاحظة

ولكن إذا كان لنا أعداد وكانت فيها الأحداث A, B, C مستقلة مثنى

فهذا يعني أن $A \cap B \cap C = \emptyset$

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)\,P(B)\,P(C) = \frac{1}{8}$$

مبرهنة: إذا كانت الحوادث A, B مستقلة عندئذ يكون:

1) $A, \bar{B}$ مستقلة
2) $\bar{A}, B$ ″
3) $\bar{A}, \bar{B}$ ″

على سبيل المثال: إذا كان احتمال أن يعيش رجل 20 عاماً آخر هو (0.60) واحتمال أن تعيش زوجته 20 عاماً آخر (0.70) عندئذٍ:

1- ما هو احتمال أن يعيش الاثنان 20 عاماً آخر
2- ″ ″ ″ يموت الزوج وتعيش الزوجة.
3- ما هو احتمال أن يموت الاثنان خلال 20 عاماً آخر

الحل: نعرض A حدث بقاء الرجل 20 عام

نعرض B حدث بقاء الزوجة 20 عام

أي أن هذه الحوادث مستقلة وبالتالي:

1) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = (0.60)\,(0.70)$
2) $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B) = (0.40)\,(0.70)$
3) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (0.40)\,(0.30)$

مبرهنة: إذا كانت الأحداث A, B, C مستقلة بالإجمال عندئذٍ تكون $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ أيضاً مستقلة بالإجمال.

ويمكن تعميم هذا الكلام لـ n حدث أي إذا كانت الأحداث $A_1, A_2, \dots, A_n$ مستقلة بالإجمال عندئذٍ $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \dots, \bar{A}_n$ مستقلة بالإجمال.

مثال: إذا كان لدينا $A_1, A_2, \dots, A_n$ أحداث مستقلة بالإجمال حيث $P(A_i)$ ... عندئذٍ أوجد احتمال اتحاد هذه الأحداث

$i = 1, \dots, n$

"يعني ما هو احتمال أن يقع أحد هذه الأحداث بالتحديد"

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right)$$

"الأحداث المستقلة بالإجمال متمماتها أحداث مستقلة"

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - P(A_i)\right)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - (1 - (\tfrac{1}{2})^i)) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (\tfrac{1}{2})^i$$

$$= 1 - \frac{1}{2^{1+2+3+\dots+n}} = \frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

• اذا فرضنا أن $n=10$ عندئذٍ : $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \frac{1}{2^{55}}$

• دراسة المتغيرات العشوائية :

- تعريف المتغير العشوائي : اذا كان لدينا فضاء احتمالياً (Ω, F, P) عندئذٍ نعرف المتغير العشوائي ، الذي نرمز له بالرمز X هو دالة منطلقها Ω ومستقرها R : $X : \Omega \to R$

حيث يحقق شرط التحويل : $\{w \in \Omega ,\ X(w) < x\} \in F$ ، $x \in R$

باختصار $\{X < x\} \in F$

$x \in]-\infty, x[$

ملاحظة : عندما يكون لدينا X متغير عشوائي على الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P) عندئذٍ كل من المجموعات التالية تنتمي لـ F :

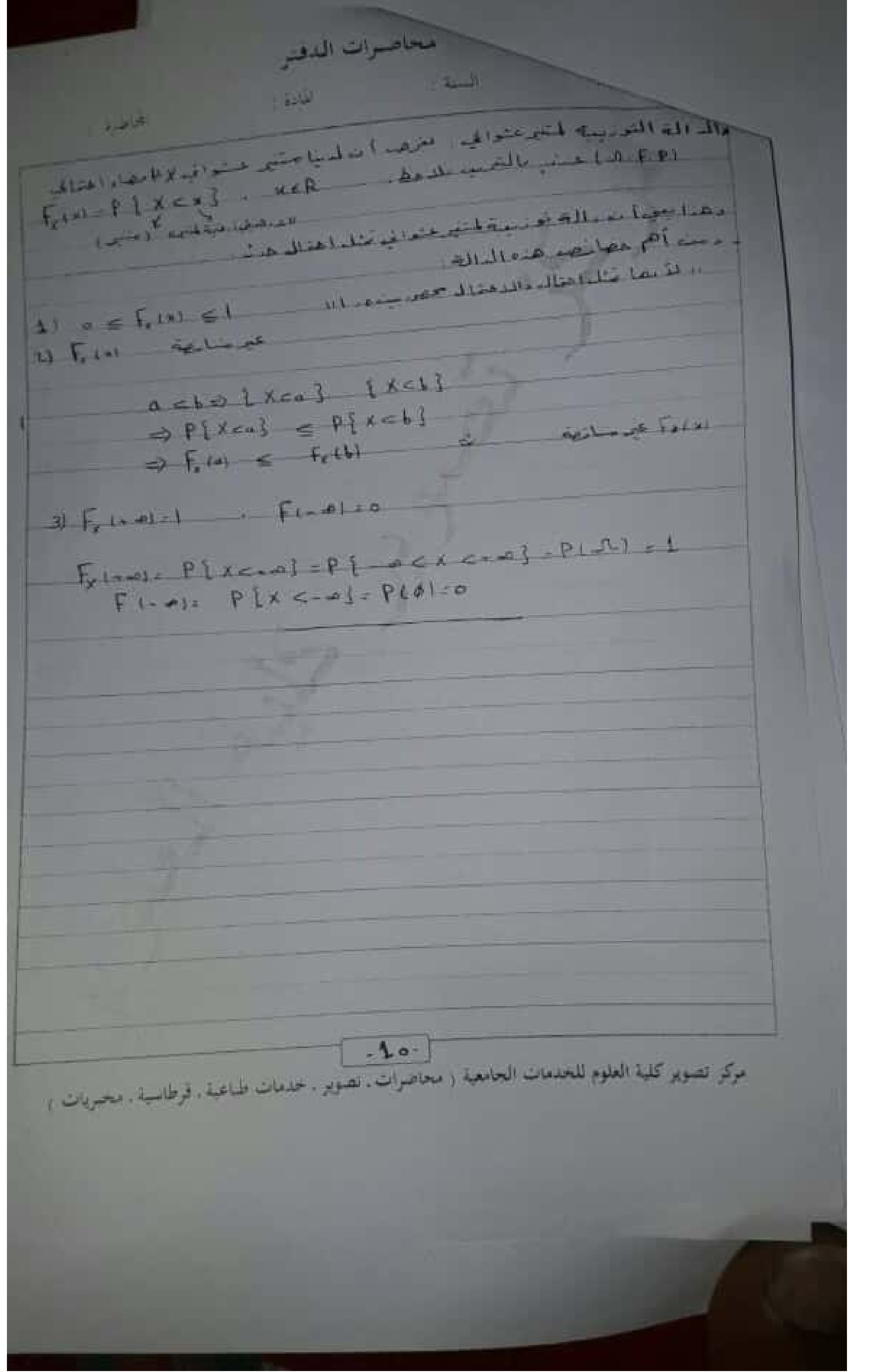
1) $\{X \geq x\} \in F$
2) $\{X = x\} \in F$
3) $\{X \leq x\} \in F$
4) $\{X > x\} \in F$
5) $\{a < X < b\} \in F$; $a, b \in R$
6) $\{a < X \leq b\} \in F$
7) $\{a \leq X < b\} \in F$
8) $\{a \leq X \leq b\} \in F$

• بالاضافة الى الحدثين $\emptyset$ ، Ω ، هنا يصبح لدينا [11] حدث .

" جميع الاحداث مغلقة بالنسبة للعملية المفروضة "

$$\{X \geq x\} = \underset{\in F}{\Omega} - \underset{\in F}{\{X < x\}} \in F$$

$$\{a < X \leq b\} = \underset{\in F}{\{X \leq b\}} - \underset{\in F}{\{X \leq a\}} \in F$$



الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي: نفرض أن لدينا متغير عشوائي X ضمن فضاء احتمالي (Ω, F, P) يعرف بالشكل التالي:

$F_X(x) = P\{X < x\}$, $x \in R$

وهذا يعني أن الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي تمثل احتمال حدث

من أهم خصائص هذه الدالة:

لأنها تمثل احتمال والاحتمال محصور بين 0 و 1

1) $0 \le F_X(x) \le 1$

2) $F_X(x)$ غير متناقصة

$a < b \Rightarrow \{X<a\} \subset \{X<b\}$

$\Rightarrow P\{X<a\} \le P\{X<b\}$

$\Rightarrow F_X(a) \le F_X(b)$ الدالة غير متناقصة

3) $F_X(+\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$

$F_X(+\infty) = P\{X<+\infty\} = P\{-\infty<X<+\infty\} = P(\Omega) = 1$

$F(-\infty) = P\{X<-\infty\} = P(\emptyset) = 0$